

5. La ley de gravitación de Newton establece que la fuerza gravitacional entre dos partículas puntuales de masas  $m_1$  y  $m_2$ , separadas una distancia  $r$ , viene dada por:

$$F = K \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad r > 0$$

Hallar la razón de cambio de la fuerza entre las partículas con respecto a  $r$  y explica porque es negativa.

Solución:

Puesto que  $K$ ,  $m_1$  y  $m_2$  son constantes la función anterior la podemos escribir como:

$$F = K m_1 m_2 \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dr} &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{K m_1 m_2}{\Delta r} \left[ \frac{1}{(r + \Delta r)^2} - \frac{1}{r^2} \right] \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{K m_1 m_2}{\Delta r} \left[ \frac{r^2 - (r + \Delta r)^2}{r^2 (r + \Delta r)^2} \right] \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{K m_1 m_2}{\Delta r} \left[ \frac{r^2 - r^2 - 2r\Delta r - (\Delta r)^2}{r^2 (r + \Delta r)^2} \right] \\ &= \lim_{\Delta r \rightarrow 0} \frac{K m_1 m_2}{\Delta r} \left[ \frac{\Delta r(-2r - \Delta r)}{r^2 (r + \Delta r)^2} \right] \\ &= -\frac{2K m_1 m_2}{r^3} \end{aligned}$$

La razón de cambio es negativa pues la fuerza disminuye conforme  $r$  aumenta, ya que la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia  $r$ .

6. Al pulsar una cuerda de guitarra, vibra con una frecuencia

$$F = \sqrt{T}$$

donde F se mide en vibraciones por segundo y la tensión de la cuerda T en libras.  
Hallar la razón de cambio de la frecuencia cuando a) T = 4      b) T = 9

Solución:

La razón de cambio de F con respecto a T está dada por:

$$\frac{dF}{dT} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{200\sqrt{T + \Delta T} - 200\sqrt{T}}{\Delta T}$$

Como el límite anterior es aparentemente indeterminado tenemos que buscar una función equivalente racionalizando el numerador

$$\begin{aligned} & \frac{200\sqrt{T + \Delta T} - 200\sqrt{T}}{\Delta T} \cdot \frac{200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T}}{200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T}} \\ &= \frac{40000(T + \Delta T) - 40000T}{\Delta T(200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T})} = \frac{40000\Delta T}{\Delta T(200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T})} \\ &= \frac{40000}{(200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T})} \end{aligned}$$

Así

$$\frac{dF}{dT} = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \frac{40000}{(200\sqrt{T + \Delta T} + 200\sqrt{T})} = \frac{40000}{400\sqrt{T}} = \frac{100}{\sqrt{T}}$$

$$\frac{dF}{dT} = \frac{100}{\sqrt{T}}$$

$$\text{a) Si } T = 4 \rightarrow \frac{dF}{dT} = \frac{100}{\sqrt{4}} = 50 \text{ vib/s por cada libra de tensión}$$

$$\text{b) Si } T = 9 \rightarrow \frac{dF}{dT} = \frac{100}{\sqrt{9}} = 33.333 \text{ vib/s por cada libra de tensión}$$

#### PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dadas las siguientes funciones calcular sus derivadas usando la definición de derivada como un límite

$$\text{a) } f(x) = 4x^2 - 2 \quad \text{b) } k(t) = t^2 + t$$

$$\text{c) } s(y) = y^3 - y^2 \quad \text{d) } k(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\text{e) } f(x) = \frac{x-3}{2x-1} \quad \text{f) } g(y) = \frac{x^2}{x+2}$$

$$\text{g) } g(x) = \sqrt{2x+4} \quad \text{h) } s(t) = \sqrt{x^2-4}$$

2. Suponer que se nos dan dos funciones f y g con las siguientes 3 propiedades:

$$\text{P1. } f(x+h) = f(x)g(h) + f(h)g(x)$$

$$\text{P2 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} = 1$$

$$\text{P3 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - 1}{h} = 0$$

Demostrar que  $f'(x) = g(x)$

3. Una infección viral se propaga en cierta población de manera tal que  $V(t) = 130t + 10t^2$  personas contraen el virus en  $t$  semanas. ¿A qué velocidad se propaga el contagio al final de 4 semanas?

4. Una inyección de  $x$  gramos de cierta droga resulta en una disminución de la presión sanguínea de  $D(x) = 0.5x^3 - 4x$  milímetros de mercurio. Hallar la sensibilidad a 4 gramos de esa droga. La sensibilidad se define como la tasa de cambio de la presión sanguínea, medida en mm de mercurio, con respecto a la dosis.

5. Supongamos que en una reacción química  $t^2 + 3t$  grs. de una sustancia se transforman en otra sustancia en  $t$  segundos. ¿Que tan rápido esta ocurriendo esta transformación a los 5 seg?

6. Se cava un tunel en dirección horizontal por el pie de una montaña. En un punto situado a  $x$  metros de la entrada, la superficie de la montaña tiene una altitud de  $0.32x + 2000$  pies por arriba del nivel del mar. ¿Cuál es la pendiente de la montaña exactamente arriba del punto del túnel situado a 550 pies de la entrada?

7. El costo de producir  $x$  artículos es  $0.01x^2 + 6x + 1000$  dólares y el ingreso es  $25x$  dólares. ¿Cuál es el beneficio marginal cuando el nivel de producción está en 200 artículos.



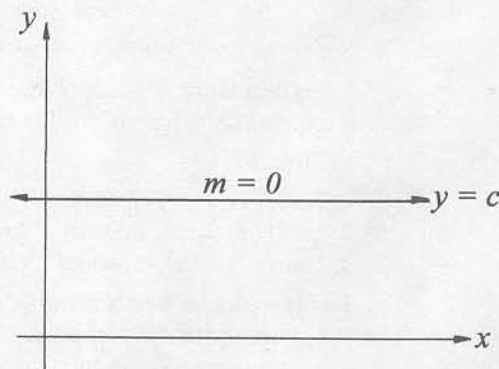
**TÉCNICAS DE DERIVACIÓN**

En esta sección se presentarán las reglas y las técnicas para derivar funciones algebraicas sin necesidad de recurrir a la definición de la función derivada. Se verán los teoremas que nos permiten calcular la derivada de un polinomio, de funciones que incluyan potencias fraccionarias, así como las reglas para derivar el producto y el cociente de dos funciones. Estudiaremos aquí también la importante regla denominada de la cadena para la derivación de funciones compuestas. En muchas ocasiones es muy difícil en las funciones implícitas expresar una de sus variables en función de la otra por lo que veremos como derivar una función de este tipo mediante la técnica denominada derivación implícita. Al final de esta sección estudiaremos las derivadas de las derivadas, llamadas derivadas de orden superior, destacando la importancia y aplicaciones de la segunda derivada.

**LA DERIVADA DE UNA CONSTANTE**

Si  $f(x) = c$  donde  $c$  es un número, entonces  $f'(x) = 0$

Sabemos que la función  $y = c$  representa una línea horizontal cuya pendiente es por supuesto igual a cero, y como la derivada representa la pendiente de la curva en cada punto de su dominio, la regla anterior confirma que el valor de la pendiente en cada punto de una línea horizontal es cero.

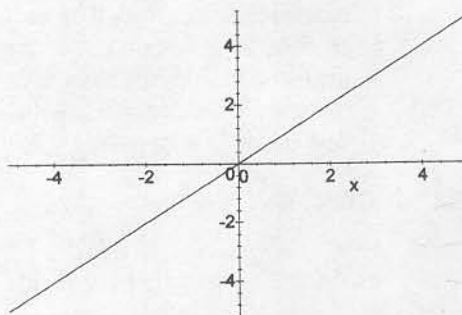
**EJEMPLOS**

1. Si  $f(x) = 8$ , entonces  $f'(x) = 0$
2. Si  $f(x) = 1/2$ , entonces  $f'(x) = 0$
3. Si  $f(x) = \sqrt{3}$ , entonces  $f'(x) = 0$
4. Si  $f(x) = 1/\sqrt{2}$ , entonces  $f'(x) = 0$

## LA DERIVADA DE LA FUNCIÓN IDENTIDAD

Si  $f(x) = x$ , entonces  $f'(x) = 1$

La gráfica de la función  $f(x) = x$  corresponde a una recta que pasa por el origen y cuyo ángulo de inclinación con respecto al eje  $x$  es de  $45^\circ$  por lo que su pendiente es 1, de tal forma que la derivada, al representar la pendiente de la gráfica en cada punto vale 1.



## REGLA PARA LA DERIVADA DE UNA POTENCIA

Si  $f(x) = x^n$ , donde  $n$  es un entero positivo, entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$

La regla anterior se puede obtener por medio de la definición de función derivada y el teorema del binomio, por lo que se deja como tarea para el alumno.

## EJEMPLOS

1. Sea  $f(x) = x^2$ , entonces  $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$
2. Sea  $f(x) = x^3$ , entonces  $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$
3. Sea  $f(x) = x^6$ , entonces  $f'(x) = 6x^{6-1} = 6x^5$

La regla para las potencias  $x^n$  se estableció para  $n$  entero y positivo, sin embargo ésta se puede extender para cualesquiera valores de  $n$  racionales, irracionales, positivos o negativos. De tal forma que:

4. Sea  $f(x) = x^{-2}$ , entonces  $f'(x) = -2x^{(-2-1)} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$
5. Sea  $f(x) = x^{1/3}$ , entonces  $f'(x) = (\frac{1}{3})x^{(1/3-1)} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$
6. Sea  $g(t) = t^{3/2}$ , entonces  $g'(t) = \frac{3}{2}t^{(3/2-1)} = \frac{3}{2}t^{1/2}$
7. Sea  $w(s) = \frac{4}{s^{1/4}}$ , la función se puede reescribir como  $w(s) = 4s^{-1/4}$  y entonces



$$w'(s) = 4[-\frac{1}{4}s^{(-1/4-1)}] = -s^{-5/4}$$

Con la generalización de la regla anterior podemos derivar raíces, interpretándolas como potencias fraccionarias.

8. Sea  $f(x) = \sqrt{x}$ , podemos reescribir la función como  $f(x) = x^{1/2}$ , entonces

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

9. Sea  $w(t) = \sqrt[3]{t^2}$ , reescribiendo la función como  $w(t) = t^{2/3}$ , entonces

$$w'(t) = \frac{2}{3}t^{(2/3-1)} = \frac{2}{3}t^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{t}}$$

### DERIVADA DE UNA FUNCIÓN MULTIPLICADA POR UNA CONSTANTE

Si  $f(x) = cg(x)$ , donde  $c$  es una constante, entonces  $f'(x) = cg'(x)$

La regla anterior se puede enunciar con palabras de la siguiente forma "la derivada de una constante por una función es igual a la constante multiplicada por la derivada de la función". La podemos interpretar de la siguiente forma; supongamos que la función  $f$  representa el tamaño de una población y existe otra función  $g$  que representa a otra población 5 veces mayor que la de  $f$ , entonces si interpretamos a la derivada como la tasa de crecimiento de la población, quiere decir que la tasa de crecimiento de  $g$  es 5 veces mayor que la de  $f$ .

#### EJEMPLOS

1. Sea  $f(x) = 3x^4$ , entonces  $f'(x) = 3(4x^3) = 12x^3$

2. Sea  $f(x) = -10x^3$ , entonces  $f'(x) = -10(3x^2) = -30x^2$

3. Sea  $f(x) = \frac{x^4}{3}$ , esta función la podemos escribir como  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^4$ , entonces su derivada es

$$f'(x) = \frac{1}{3}(4x^3) = \frac{4}{3}x^3$$

4. Sea  $f(x) = \frac{x^5}{\sqrt{5}}$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}(5x^4) = \frac{5}{\sqrt{5}}x^4 = \sqrt{5}x^4$

5. Sea  $f(x) = \frac{4}{x^{1/2}}$ , reescribimos  $f(x)$  como  $f(x) = 4x^{-1/2}$ , entonces

$$f'(x) = 4[-\frac{1}{2}x^{(-1/2-1)}] = -2x^{-3/2} = -\frac{2}{x^{3/2}}$$

6. Sea  $f(x) = \frac{1}{12}x^{-6}$ , entonces  $f'(x) = \frac{1}{12}[-6x^{(-6-1)}] = -\frac{1}{2}x^{-7} = -\frac{1}{2x^7}$

7. Sea  $g(w) = 3\sqrt[3]{w^4}$ , reescribiendo la función  $g(w) = 3w^{4/3}$ , entonces

$$g'(w) = 3[\frac{4}{3}w^{(4/3-1)}] = 4w^{1/3} = 4\sqrt[3]{w}$$

### LA DERIVADA DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES

Si  $h(x) = f(x) + g(x)$ , entonces  $h'(x) = f'(x) + g'(x)$

Esta se enuncia en palabras como "la derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones".

#### EJEMPLOS

1. Sea  $f(x) = 5x^2 + 2x$ , entonces  $f'(x) = D_x(5x^2) + D_x(2x) = 10x + 2$

2. Sea  $g(x) = -\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2}$ , entonces  $g'(x) = -\frac{1}{12}(3x^2) - \frac{1}{2}(2x) = -\frac{1}{4}x^2 - x$

La regla para la derivada de la suma de dos funciones se puede extender para un número finito de sumandos, de tal forma que con ella podemos derivar cualquier polinomio, puesto que un polinomio es una suma de funciones.

#### EJEMPLOS

3. Sea  $f(x) = \frac{2}{5}x^5 - 15x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 14$ , entonces  
 $f'(x) = \frac{2}{5}(5x^4) - 15(3x^2) + \frac{1}{2}(2x) - 0$   
 $f'(x) = 2x^4 - 45x^2 + x$

4. Sea  $w(t) = -16(5t^4 - 2t^3 + 10t^2 - 2t + 25)$ , entonces  
 $w'(t) = -16[5(4t^3) - 2(3t^2) + 10(2t) - 2 + 0]$   
 $w'(t) = -16[20t^3 - 6t^2 + 20t - 2]$   
 $w'(t) = -320t^3 + 96t^2 - 320t + 32$

5. Sea  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + 6x$ , entonces  
 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}(4x^3) - \frac{2}{9}(3x^2) + \frac{3}{4}(2x) + 6$   
 $\frac{dy}{dx} = x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$

6. Si  $s = \frac{1}{2}t^{-3} - \frac{5}{t^2} - 6t$ , entonces reescribimos  $s = \frac{1}{2}t^{-3} - 5t^{-2} - 6t$  y  
 $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}[-3t^{(-3-1)}] - 5[-2t^{(-2-1)}] - 6$   
 $\frac{ds}{dt} = -\frac{3}{2}t^{-4} + 10t^{-3} - 6 \quad \text{o} \quad \frac{ds}{dt} = -\frac{3}{2t^4} + \frac{10}{t^3} - 6$

### LA DERIVADA DE UN PRODUCTO

Contrariamente a lo que se puede suponer la derivada del producto de dos funciones no es el producto de sus derivadas, como podemos ver de acuerdo con la regla para derivar un producto de dos funciones.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones derivables de  $x$ , entonces si  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$h'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$



La regla del producto se puede enunciar como: “la derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera función.”

## EJEMPLOS

1. Sea  $g(x) = 5x(2x^2 - 1)$ , entonces
 
$$g'(x) = 5 [xD_x(2x^2 - 1) + (2x^2 - 1)D_x(x)]$$

$$g'(x) = 5 [x(4x) + (2x^2 - 1)(1)]$$

$$g'(x) = 5(4x^2 + 2x^2 - 1) = 5(6x^2 - 1)$$

$$g'(x) = 30x^2 - 5$$
2. Sea  $f(x) = (x + 2)(x^2 - 4)$ , entonces
 
$$f'(x) = (x + 2)(2x) + (x^2 - 4)(1)$$

$$f'(x) = 2x(x + 2) + (x^2 - 4) = (x + 2)[2x + (x - 2)]$$

$$f'(x) = (x + 2)(3x - 2) \text{ o } f'(x) = 3x^2 + 4x - 4$$
3. Sea  $H(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x^3 + 2x)$ , entonces
 
$$H'(x) = \sqrt[3]{x^2}(9x^2 + 2) + (3x^3 + 2x) \left[ \frac{2}{3}x^{(2/3-1)} \right]$$

$$H'(x) = \sqrt[3]{x^2}(9x^2 + 2) + (3x^3 + 2x) \left( \frac{2}{3x^{1/3}} \right)$$

$$H'(x) = \sqrt[3]{x^2}(9x^2 + 2) + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}(3x^3 + 2x)$$
4. Sea  $y = (3x^5 - 5x) \left( \frac{1}{x^2} \right)$

Podemos reescribir la función como  $y = (3x^5 - 5x)(x^{-2})$ , así

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3x^5 - 5x)(-2)(x^{-3}) + (x^{-2})(15x^4 - 5) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{(-2)(3x^5 - 5x)}{x^3} + \frac{(15x^4 - 5)}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-6x^5 + 10x + 15x^5 - 5x}{x^3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{9x^5 + 5x}{x^3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{9x^4 + 5}{x^2} \end{aligned}$$

## LA DERIVADA DE UN COCIENTE

De la misma forma que advertimos que la derivada del producto de dos funciones no es el producto de las derivadas de las funciones, así la derivada del cociente de dos funciones no es el cociente de las derivadas de las funciones. Para derivar el cociente de dos funciones derivables hay que seguir la regla que se enuncia a continuación, cuya demostración se puede hacer mediante la definición de la función derivada y se deja para el alumno.



Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  dos funciones derivables de  $x$ , y sea  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , con  $g(x) \neq 0$

$$\text{entonces, } h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

La regla anterior es común enunciarla con palabras como sigue: “La derivada de un cociente de dos funciones es igual a otro cociente cuyo numerador es igual al denominador multiplicado por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador y cuyo denominador es el denominador original elevado al cuadrado.”

#### EJEMPLOS

1. Sea  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ , calcular  $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x+2) D_x(x-1) - (x-1) D_x(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x+2)(1) - (x-1)(1)}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x+2-x+1}{(x+2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

2. Sea  $y = \frac{3-2x-x^2}{x^2-1}$ , calcular  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2-1)(-2-2x) - (3-2x-x^2)(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x^2 - 2x^3 + 2 + 2x - 6x + 4x^2 + 2x^3}{(x^2-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x^2 - 4x + 2}{(x^2-1)^2}$$

3. Sea  $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ , entonces

$$h'(x) = \frac{(x^2+1)(0) - (1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Observa que siempre que el numerador del cociente sea constante su derivada será igual a cero, por lo que el numerador de la derivada se reduce a “menos el numerador por la derivada del denominador”

4. Derivar  $y = -\frac{2}{x-3}$

$$y' = -\frac{-2(1)}{(x-3)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(x-3)^2}$$

Nota que el doble signo negativo deja positiva toda la expresión

5. Sea  $g(x) = x^4 \left( 2 - \frac{1}{x+2} \right)$ , calcular  $g'(x)$

La función anterior involucra un producto de funciones por lo que para derivar hay que aplicar la regla del producto, pero hay que observar que uno de los factores de la función es un cociente por lo que al derivar ese factor hay que aplicar la regla del cociente. Veamos.

$$g'(x) = x^4 D_x \left( 2 - \frac{1}{x+2} \right) + \left( 2 - \frac{1}{x+2} \right) D_x (x^4)$$

Al derivar la expresión  $\left( 2 - \frac{1}{x+2} \right)$  observa que la derivada de 2 es cero y la derivada de  $-\frac{1}{x+2}$  se calcula como en el ejercicio anterior.

$$g'(x) = x^4 \left[ \frac{1}{(x+2)^2} \right] + \left( 2 - \frac{1}{x+2} \right) (4x^3)$$

$$g'(x) = \frac{x^4}{(x+2)^2} + \left( \frac{2x+2-1}{x+2} \right) (4x^3)$$

$$g'(x) = \frac{x^4}{(x+2)^2} + \frac{(4x^3)(2x+1)}{x+2}$$

$$g'(x) = \frac{x^4}{(x+2)^2} + \frac{8x^4 + 4x^3}{x+2}$$

$$g'(x) = \frac{x^4 + (x+2)(8x^4 + 4x^3)}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{x^4 + 8x^5 + 4x^4 + 16x^4 + 8x^3}{(x+2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{8x^5 + 21x^4 + 8x^3}{(x+2)^2}$$

6. Sea  $S(t) = \left( \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + 1} \right) (t^2 + t + 1)$ , calcular  $\frac{ds}{dt}$

$$\frac{ds}{dt} = \left( \frac{t^2 - t - 3}{t^2 + 1} \right) (2t + 1) + (t^2 + t + 1) \left[ \frac{(t^2 + 1)(2t - 1) - (t^2 - t - 3)(2t)}{(t^2 + 1)^2} \right]$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2t + 1)(t^2 - t - 3)}{t^2 + 1} + (t^2 + t + 1) \left[ \frac{2t^3 - t^2 + 2t - 1 - 2t^3 + 2t^2 + 6t}{(t^2 + 1)^2} \right]$$